GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

PRODUCTO ESCALAR

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos x$ (Cuando sepamos el ángulo que forman a y b (x)).

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3$ (Cuando sepamos las coordenadas de a y b).

Cuando los vectores son perpendiculares su producto escalar será 0 (Cero)(cos 90 = 0).

PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ y $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{x'},\mathbf{y'},\mathbf{z'})$ $\quad \vec{\mathbf{u}} \mathbf{x} \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x'} & \mathbf{y'} & \mathbf{z'} \end{vmatrix}$

(El vector que resulta de este determinante es **perpendicular** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y su módulo coincide con el *ÁREA DEL PARALELOGRAMO* que forman u y v).

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\alpha$ (α es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.)

COORDENADAS DE UN VECTOR LIBRE

Dados los puntos A(a,b,c) y B (d,e,f) el vector con origen en A y extremo en B se calcula restando B - A $\overrightarrow{AB} = B - A$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO. Para hallar la ecuación de una recta es necesario conocer ***UN PUNTO Y EL VECTOR DIRECTOR*** de la misma.

Una recta, [obtenida a partir de un PUNTO (x_0, y_0, z_0) y un VECTOR (v_1 , v_2 , v_3)], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL: $(x,y,z) = (x_0 , y_0, z_0) + t\,(v_1 , v_2 , v_3)$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS : $\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$

3.- ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}}{\mathbf{v_1}} = \dfrac{\mathbf{y} - \mathbf{y_0}}{\mathbf{v_2}} = \dfrac{\mathbf{z} - \mathbf{z_0}}{\mathbf{v_3}}$

4.- EC. GENERAL DE LA RECTA

(Intersección de dos planos): $\begin{cases} \mathbf{A\,x + B\,y + C\,z + D = 0} \\ \mathbf{A'x + B'y + C'z + D = 0} \end{cases}$

NOTA: Para hallar **el vector** de una recta expresada como intersección de dos planos basta con hacer el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$. *Siendo* $\vec{a}$ = (A,B,C) y $\vec{b}$ = (A',B',C').

Para hallar **un punto** sólo hay que darle a *'x'*, a *'y'* o a *'z'* un valor arbitrario, sustituirlo en el sistema y despejar las otras dos incógnitas.

ECUACIONES DEL PLANO

Para hallar la ecuación de un plano es necesario conocer ***UN PUNTO Y DOS VECTORES DIRECTORES*** del mismo.

Un plano, [Obtenido a partir de un **PUNTO (x_0, y_0, z_0)** y **DOS VECTORES $\vec{V}$ (v_1, v_2, v_3) y $\vec{W}$ (w_1, w_2, w_3)**], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3) + s(w_1,w_2,w_3)$$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_1 + s\cdot w_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 + s\cdot w_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 + s\cdot w_3 \end{cases}$$

3.- ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

NOTA: Para hallarla sólo hay que realizar este determinante e igualarlo a cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

4.- ECUACIÓN SEGMENTARIA:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Los valores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se denominan, respectivamente, ***abscisa***, ***ordenada***, y ***cota*** en el origen.

5.- OTRA FORMA DE HALLAR LA ECUACIÓN DE UN PLANO:

Un plano también se puede hallar sabiendo **UN PUNTO Y SÓLO UN VECTOR**, siempre y cuando ese vector sea **perpendicular al plano** (llamado vector normal), las coordenadas de ese vector coinciden con los coeficientes (**A,B,C**) del plano;

para hallar el término independiente (**D**) del plano, sólo hay que sustituir las coordenadas del punto que nos den y despejar **D**.

Ej/.

Vector normal (3, 4, 5)

π: **A**x + **B**y + **C**z + D = O

POSICIONES RELATIVAS.

Posición relativa de DOS PLANOS.

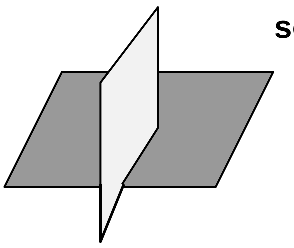
π: A x + B y + C z + D = 0

π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

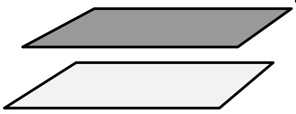
	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS PLANOS
Caso 1	**2**	**2**	Planos **secantes**
Caso 2	**1**	**2**	Planos **paralelos** y distintos
Caso 3	**1**	**1**	Planos **coincidentes**

secantes



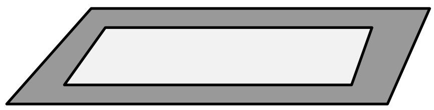
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

paralelos



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

coincidentes



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

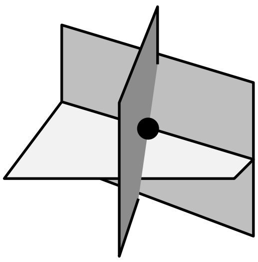
Posición relativa de TRES PLANOS

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

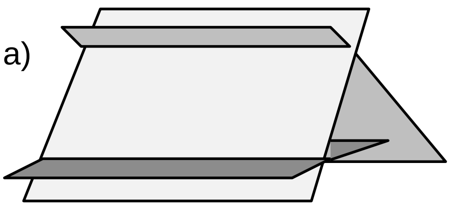
$\pi: \; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$
$\pi': \; A'\,x + B'y + C'z + D' = 0$
$\pi'': \; A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de **TRES PLANOS**
Caso 1	**3**	**3**	Planos **secantes en un punto**.
Caso 2	**2**	**3**	a) Planos **secantes dos a dos** forman una superficie prismática. **(3 SEC)** b) **Dos** planos **paralelos** cortados por el otro. **(2 PARAL. y 1 SEC)**
Caso 3	**2**	**2**	a) Plano **distintos** y se cortan en una recta. (3 SEC) b) **Dos coincidentes** y el otro los corta. (2 COINC. y 1 SEC.)
Caso 4	**1**	**2**	a) Planos **paralelos** y distintos **dos a dos**. **(3 PARAL.)** b) **Dos** son **coincidentes** y **el otro paralelo** a ellos y distinto. **(2 COINC. y 1PARAL.)**
Caso 5	**1**	**1**	Planos **coincidentes**.

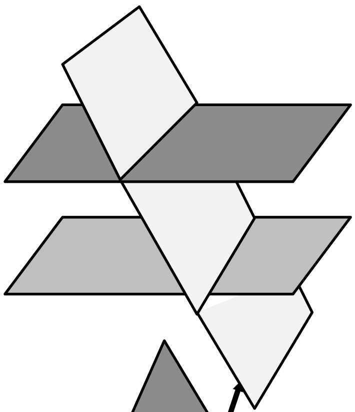
Caso 1:



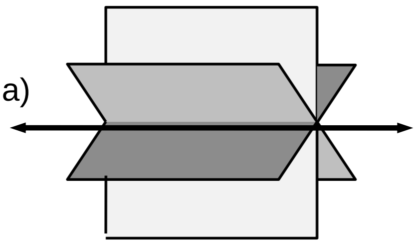
Caso 2: a)



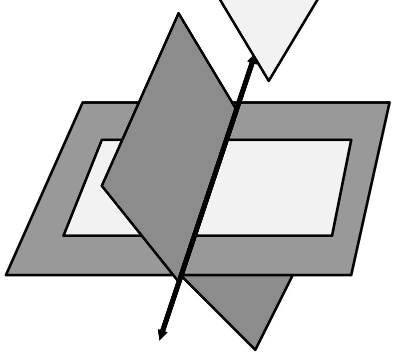
b)

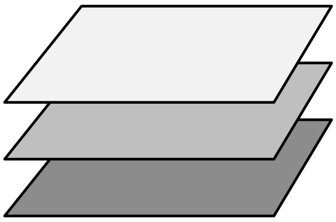
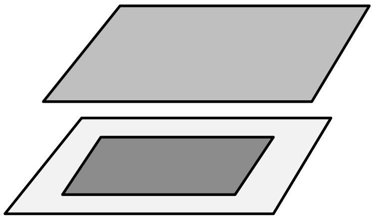


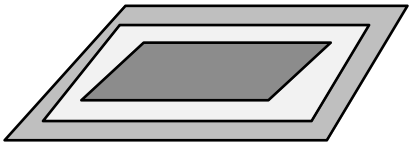
Caso 3: a)



b)



Caso 4: a)  b) 

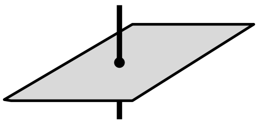
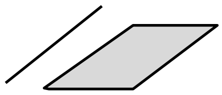
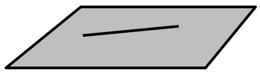
Caso 5: 

Posición relativa de PLANO Y RECTA

Si la recta nos la dan de la forma general: $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Y el plano de la siguiente forma $\alpha \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$ Entonces se estudian los rangos de M y M*:

	Rango de M	Rango de M*	Posición de recta y plano	Gráficamente
Caso 1	3	3	Recta y plano secantes	
Caso 2	2	3	Recta y plan paralelos	
Caso 3	2	2	Recta contenida en el plano	

Posición relativa DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas **r** y **s** por sus ecuaciones generales:

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = (\end{cases} \quad s:\begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Se estudian los rangos de *M* y *M** :

	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS RECTAS
Caso 1	**3**	**4**	rectas **cruzadas**
Caso 2	**3**	**3**	rectas **secantes**
Caso 3	**2**	**3**	rectas **paralelas**
Caso 4	**2**	**2**	rectas **coincidentes**

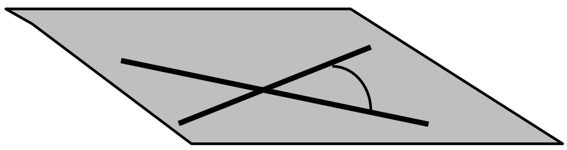
Dadas dos rectas **r** y **s**, de las que conocemos el vector director y un punto de cada una:

VECTORES $\vec{V}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{W}(w_1, w_2, w_3)$ y PUNTOS (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)

		Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS RECTAS
$M = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$	Caso 1	**2**	**3**	rectas **cruzadas**
$M = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \end{pmatrix}$	Caso 2	**2**	**2**	rectas **secantes**
	Caso 3	**1**	**2**	rectas **paralelas**
	Caso 4	**1**	**1**	rectas **coincidentes**

Ángulo de DOS RECTAS:

Sean **u** y **v** los vectores de dos rectas **r** y **s**.

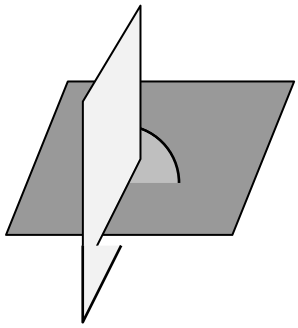


$$Cos\ x = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Ángulo entre DOS PLANOS:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores **normales** de dos planos π y π'

$$Cos\ x = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

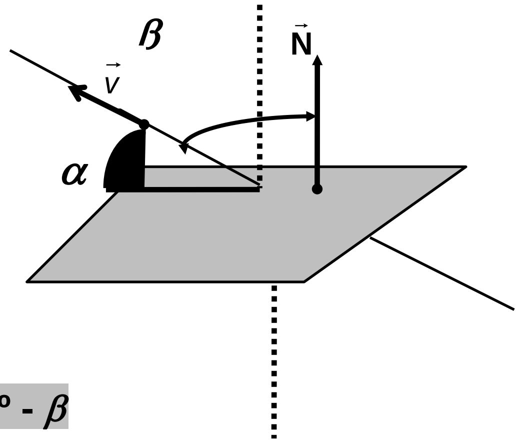


Ángulo entre PLANO Y RECTA.

Sea $\vec{N}$ el vector normal del plano
$\vec{v}$ el vector director de la recta.

$$\text{Cos}\ \beta = \frac{|\vec{N}\cdot\vec{v}|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{v}|}$$

El ángulo que hay que hallar ***NO*** es β sino α que se calcula: ⟶ $\alpha = 90^{o} - \beta$



Distancia ENTRE DOS PUNTOS

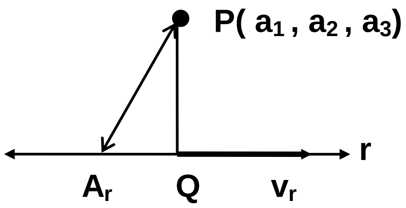
A(a_1 , a_2 , a_3) ●————● **B(b_1 , b_2 ,b_3)**

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

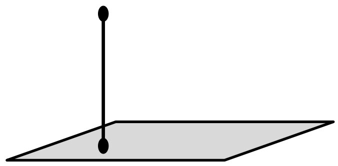
La distancia entre A y es el módulo del vector que los une.

Distancia DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{A_r P}\times\vec{V_r}|}{|\vec{V_r}|}$$



Distancia DE UN PUNTO A UN PLANO



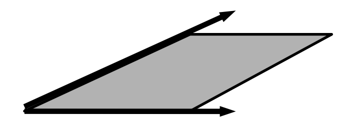
$$d(P,\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

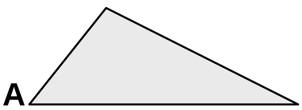
VOLUMENES Y ÁREAS

ÁREA DEL

PARALELOGRAMO: $S(ABC)=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

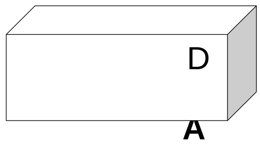


ÁREA DEL TRIANGULO: $S(ABC)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

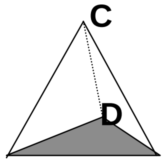


VOLUMEN DEL

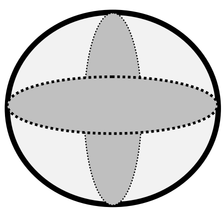
PARALELEPÍPEDO: $V=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$



VOLUMEN DEL TETRAEDRO: $V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$



SUPERFICIE ESFÉRICA: $(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{z}-\mathbf{c})^2=\mathbf{r}^2$



CÁLCULO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Llamamos **bisectriz, b,** del ángulo que forman las rectas *r* y *r'* a la recta que divide a dicho ángulo en dos partes iguales.

Hay que observar que ***son dos*** las bisectrices que podemos trazar, para hallarlas utilizaremos los vectores directores de las rectas ***r* y *r'*.**

Sean *r* y *r'* dos rectas secantes en un **punto P**, con vectores directores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, es decir:

$$\mathbf{r}: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{r'}: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}$$

- Si los vectores directores de las rectas tuviesen el mismo módulo, al sumarlos formaríamos un rombo, en el cual el vector suma y el vector diferencia serían las diagonales mayor y menor, respectivamente. En este caso, las diagonales del rombo son las bisectrices de los ángulos interiores, por tener los cuatro lados iguales y sus ángulos iguales dos a dos.
- Si los vectores no tienen el mismo módulo, normalizándolos obtenemos vectores directores de las rectas de módulo uno, y los vectores directores de las bisectrices serían el vector suma y el vector diferencia de los normalizados. Por tanto, las ecuaciones de sus bisectrices serán:

$$\mathbf{b_1}: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot (\vec{u}' + \vec{v}') \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b_2}: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot (\vec{u}' - \vec{v}')$$

siendo $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ los vectores unitarios de $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$.

Ejemplo

Vamos a hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ y $s: (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(1,0,0)$. Con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si hallamos la posición relativa de las rectas, obtenemos que se cortan en el punto **P(2,2,-1).** Sea $\vec{u}$ **= (1, 2, -2)** el vector director de ***r*** de módulo $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{v} = (1,0,0)$ el vector director de ***s***, de módulo $|\vec{v}| = 1$.

Normalizando $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, obtenemos $\vec{u}' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ y $\vec{v}' = (1,0,0)$: luego las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\mathbf{b_1}: (x,y,z) = (2,2,-1) + \lambda\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \qquad \mathbf{b_2}: (x,y,z) = (2,2,-1) + \mu\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problemas geométricos. Procedimientos analíticos

- Haz de planos

Sea la recta de ecuaciones:

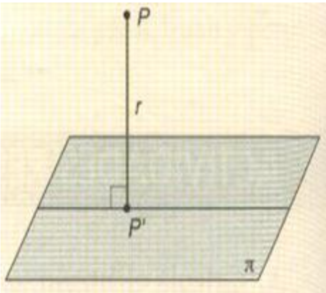
$$r:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Al conjunto de planos que contienen la recta "*r*" se le llama ***Haz de Planos***, y cualquier plano del haz tiene por ecuación:

$$t\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + s\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

- Proyección de un punto sobre un plano

Cuando se proyecta perpendicularmente un punto "P" sobre un plano "π" se obtiene un punto del mismo que coincide con la intersección de dicho plano con la recta perpendicular a este y que pasa por el punto dado.

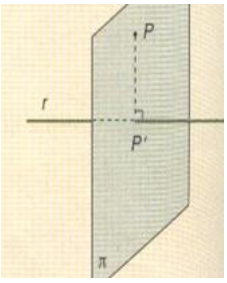


Procedimiento analítico:

- Hallamos la recta "*r*" que pasa por "*p*" y es perpendicular a "π".
- Hallamos la intersección de "*r*" con "π" y obtenemos el punto proyección "*P'*".

- Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto (P) sobre una recta (*r*) es el punto (*P'*) de intersección de la recta con el plano (π) perpendicular a ella y que pasa por el punto.

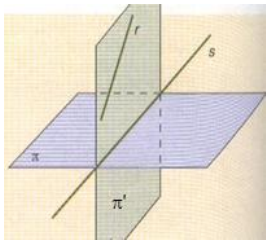


Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano π perpendicular a *r* y que pasa por *P*.
- Hallamos la intersección de π con *r* y obtenemos el punto pedido, que es el punto proyección *P'*

- ### Proyección de una recta sobre un plano

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta, que evidentemente estará contenida en el plano dado.



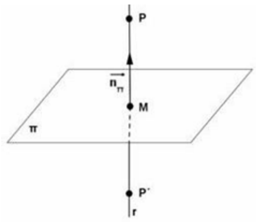
Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
- La recta proyección s de r sobre π es la intersección de π y π'

- Elementos Simétricos

- ### Simétrico de un punto respecto de un plano

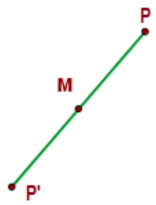
El simétrico de un punto P respecto de un plano π es el punto P' que se encuentra en la perpendicular trazada desde P al plano, de modo que P y P' equidistan del plano.



Procedimiento analítico:

- Hallamos el punto M proyección del punto P sobre el plano π.
- Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

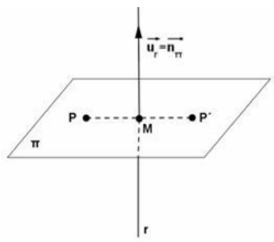
Nota: *Sean $P(x_1, y_1, z_1)$, $P'(x_2, y_2, z_2)$ y $M(x_m, y_m, z_m)$ donde M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ se verifica que:*



$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- ### Simétrico de un punto respecto de una recta

El simétrico de un punto P respecto de una recta r es el punto P' que se encuentra en la perpendicular trazada desde P a la recta, de modo que P y P' equidistan de la recta.

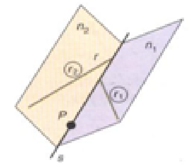


Procedimiento analítico:

- Hallamos el punto M proyección del punto P sobre la recta r.
- Calculamos el punto P' teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

- **Recta que se apoya en dos y pasa por un punto**

La recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 dadas y que pasa por un punto P dado es la recta que corta ambas y pasa por P.



La recta s se apoya en r_1 y en r_2 y pasa por el punto P.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a P.
- Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a P.
- La intersección de los planos π_1 y π_2 es la recta s buscada.

- **Recta que se apoya en dos y es paralela a una dada**

La recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 dadas y que es paralela a la recta r dada es la recta que corta a ambas y es paralela a r.

Procedimiento analítico:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a v_r.
- Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a v_r.
- La intersección de los planos π_1 y π_2 es la recta s buscada.

- **Distancia entre dos rectas que se cruzan**

Para hallar la distancia entre dos rectas r_1 y r_2 que se cruzan aplicamos el siguiente procedimiento analítico:

- Hallamos el plano π que contiene a una de la recta (r_1) y es paralelo a la otra (r_2).
- La distancias entre ambas rectas es igual a la distancia entre un punto de la recta r_2 y el plano π