

INTEGRAL

DEFINIDA

1.-INTEGRAL DEFINIDA.

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$.

Nota.- Para simplificar la demostración se considera positiva, $f(x) > 0$, en todo punto del intervalo.

Se divide el intervalo $[a, b]$ en "n" subintervalos (no necesariamente de la misma amplitud) por los puntos

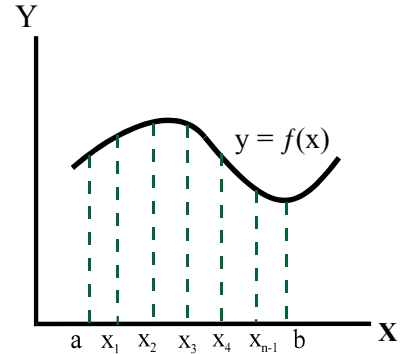
$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

así se dispone de los intervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

de amplitudes respectivas

$$h_1 = x_1 - x_0, h_2 = x_2 - x_1, \dots, h_n = x_n - x_{n-1}$$



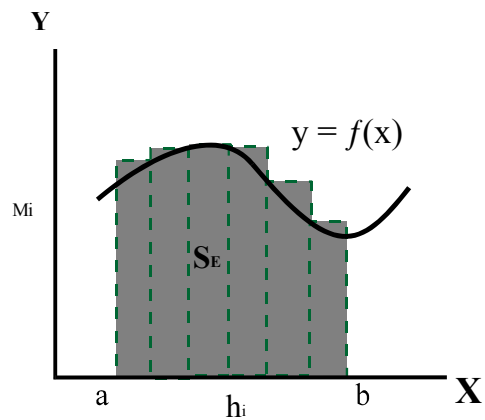
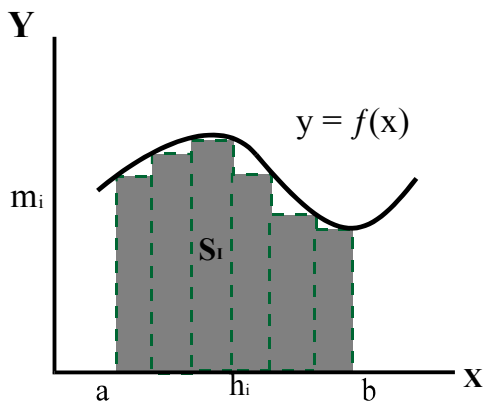
Ahora bien, como la función es continua en todo el intervalo $[a, b]$, lo es también en cada uno de los subintervalos, por lo que en cada uno de ellos alcanza un **mínimo absoluto**, m_1, m_2, \dots, m_n , y un **máximo absoluto**, M_1, M_2, \dots, M_n .

Trazando paralelas al eje OY por cada punto y paralelas al eje OX por los mínimos absolutos, m_i , se obtienen "n" rectángulos, denominados **rectángulos interiores** (ver figura de la izquierda). La suma de sus áreas es

$$S_I = h_1 m_1 + h_2 m_2 + \dots + h_n m_n = \sum_{k=1}^n h_k m_k \tag{1}$$

De forma similar, trazando paralelas al eje OX por los máximos absolutos, M_i , se obtienen "n" rectángulos, llamados **rectángulos exteriores** (ver figura de la derecha). La suma de sus áreas es

$$S_E = h_1 M_1 + h_2 M_2 + \dots + h_n M_n = \sum_{k=1}^n h_k M_k \tag{2}$$



consecuencia inmediata de las figuras, es $S_I \leq S_E$

Ahora bien, si se considerasen otros nuevos puntos en el intervalo $[a, b]$ se tendrían otros subintervalos y otros valores de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y exteriores, S'_I y S'_E . Se repite el proceso eligiendo los puntos cada vez más próximos entre sí. Así se formarían dos sucesiones de números reales, las de:

- La suma de las áreas de los rectángulos interiores:

$$S_I, S'_I, S''_I, \dots, \text{ y la}$$

- La suma de las áreas de los rectángulos exteriores:

$$S_E, S'_E, S''_E, \dots,$$

Simbolizando por m y M al mínimo y máximo absoluto de $f(x)$ en $[a, b]$, respectivamente, se tiene, en cada tipo de subdivisión

$$m \leq m_1 \leq M_1 \leq M; m \leq m_2 \leq M_2 \leq M; \dots; m \leq m_n \leq M_n \leq M$$

de donde

$$\begin{aligned} mh_1 + mh_2 + \dots + mh_n &\leq m_1h_1 + m_2h_2 + \dots + m_nh_n \leq \\ &\leq M_1h_1 + M_2h_2 + \dots + M_nh_n \leq Mh_1 + Mh_2 + \dots + Mh_n \end{aligned}$$

Como

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = b - a$$

$$mh_1 + mh_2 + \dots + mh_n = m(h_1 + h_2 + \dots + h_n) = m(b - a)$$

$$m_1h_1 + m_2h_2 + \dots + m_nh_n = S_I \quad (1)$$

$$M_1h_1 + M_2h_2 + \dots + M_nh_n = S_E \quad (2)$$

$$Mh_1 + Mh_2 + \dots + Mh_n = M(h_1 + h_2 + \dots + h_n) = M(b - a)$$

Por consiguiente:

$$\boxed{m \cdot (b - a) \leq S_I + S_E \leq M \cdot (b - a)} \quad (3)$$

que expresan cualquiera que sea la subdivisión:

- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos interiores, S_I, S'_I, S''_I, \dots , está **acotada inferiormente**.

- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos exteriores, S_E, S'_E, S''_E, \dots , está **acotada superiormente**.

- Dado que $S_I \leq S_E$, ambas sumas están **acotadas**.

Ahora bien, restando (2) y (1), miembro a miembro:

$$S_E - S_I = M_1h_1 + M_2h_2 + \dots + M_nh_n - m_1h_1 - m_2h_2 - \dots - m_nh_n$$

$$S_E - S_I = (M_1 - m_1)h_1 + (M_2 - m_2)h_2 + \dots + (M_n - m_n)h_n$$

Dado que se ha supuesto que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, si se consideran los subintervalos lo suficientemente pequeños, las diferencias $M_i - m_i$ pueden ser tan pequeñas como se desean.

Así si se toman

$$M_1 - m_1 < \varepsilon, M_2 - m_2 < \varepsilon, \dots, M_n - m_n < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow S_E - S_I = h_1\varepsilon + h_2\varepsilon + \dots + h_n\varepsilon = (h_1 + h_2 + \dots + h_n) \varepsilon = (b - a) \varepsilon$$

Luego para un ε lo suficientemente pequeño, $S_E - S_I < (b - a) \cdot \varepsilon$ se puede hacer tan pequeño como se quiera.

Simbolizando por \bar{S}_I al extremo superior de la sucesión S_I, S'_I, S''_I, \dots y por \bar{S}_E al extremo inferior de la sucesión S_E, S'_E, S''_E, \dots como

$$\lim (S_E - S_I) = 0$$

se cumple

$$\boxed{\bar{S}_E = \bar{S}_I} \tag{4}$$

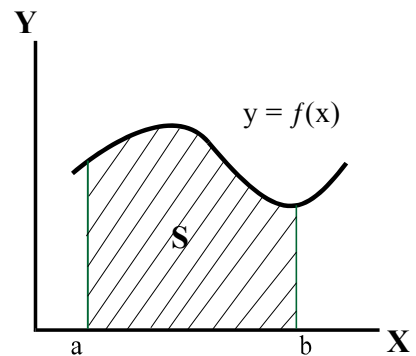
De lo que se saca la conclusión que *el extremo superior de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y el extremo inferior de las sumas de las áreas de los rectángulos exteriores coinciden.*

Representando por S el área del trapecio mixtilíneo de la figura, delimitado por $f(x)$, el intervalo $[a, b]$ y las paralelas al eje OX , $x = a$ y por $x = b$, como para toda subdivisión se cumple

$$S_I \leq S \leq S_E$$

Por la consecuencia anterior, (4), se verifica:

$$\boxed{\bar{S}_I = S = \underline{S}_E} \tag{5}$$



De esta forma se puede definir el **área del trapecio mixtilíneo** por

$$\boxed{S = \bar{S}_I = \lim_{h_i \rightarrow 0} S_I = \lim_{h_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n h_n m_k}$$

$$\boxed{S = \underline{S}_E = \lim_{h_i \rightarrow 0} S_E = \lim_{h_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n h_n M_k}$$

A dicho número real se le llama **integral definida** de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y se escribe:

$$\bar{S}_I = \bar{S}_E = \int_a^b f(x) dx$$

que se lee *integral definida entre a y b de f de x diferencial de x*.

Los extremos del intervalo cerrado son, **a** límite inferior y **b** límite superior de la integral.

2.- SIGNO DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

En la expresión anterior se ha considerado a la función positiva en todo punto del intervalo [a, b]. En esta situación, al ser m_k , M_k , h_k positivos, también lo son los productos $h_k M_k$ y $h_k m_k$ y sus sumas S_I y S_E , y en consecuencia la integral definida (límite de sumas); luego

$$\text{Si } f(x) > 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$$

Si la función $f(x)$ es negativa en todo punto de [a, b], h_k son positivos, pero m_k y M_k son negativos, por lo que son negativos los productos $h_k m_k$ y $h_k M_k$ y también lo son sus sumas. Por tanto, si $f(x) < 0$ su integral definida es negativa.

$$\text{Si } f(x) < 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 0$$

Como el área es una medida, se debe expresar como número positivo; por lo que en el presente caso el área (no la integral definida) es

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Se insiste en que la integral definida puede ser positiva o negativa, mientras que el área del trapecio mixtilíneo hay que considerarla como número positivo.

3.-PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Nos limitaremos únicamente a enunciar las propiedades de la integral definida.

I.- La integral definida de una constante por una función es igual a la constante por la integral definida de la función.

Para $K = \text{constante}$:

$$\int_a^b K \cdot f(x) dx = K \cdot \int_a^b f(x) dx$$

II.- La integral definida de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones sumando.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

III.- Si $a < b$ y $f(x) \leq g(x)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

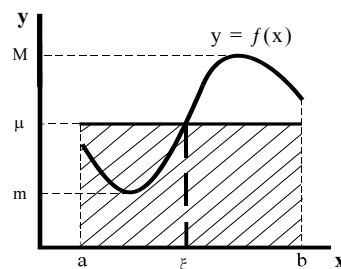
IV.-

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4.- TEOREMA DE LA MEDIA.

Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe en dicho intervalo al menos un punto $x = \xi$ tal que verifique:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(\xi)$$



En efecto, siendo m y M los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $[a, b]$, se tenía

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

como, en general, $b > a$, $b - a > 0$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M$$

de donde

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \mu$$

siendo μ tal que $m < \mu < M$.

Dado que $f(x)$ es continua, dicha función toma todos los valores comprendidos entre m y M ; por tanto, para un cierto valor de la x , $x = \xi$ ($a < \xi < b$), será

$$f(\xi) = \mu \rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

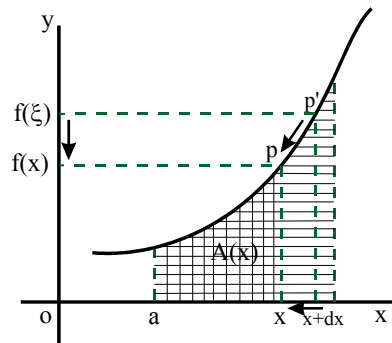
Nota.- En la figura, $(b-a) \cdot f(\xi)$ representa el área del rectángulo punteado, cuyo valor coincide con el área del trapecio mixtilíneo.

5.- FUNCIÓN ÁREA. DERIVADA DE LA FUNCIÓN ÁREA.

Sea una función $f(x)$ continua en un intervalo I . Si se consideran los puntos $x = a$ y x , punto genérico del mismo. Se define la función área $A(x)$ por el recinto del plano delimitado por la rama de la función $f(x)$ entre $x = a$ y x , el eje OX y las rectas ordenadas $x = a$ y x (en la figura recinto rayado en vertical).

Se considera un punto suficientemente próximo a x , $x+dx$, dentro del intervalo I ; la función área adapta el valor $A(x+dx)$ (en la figura, recinto rayado en horizontal).

Sea la diferencia $A(x+dx) - A(x)$, (en la figura recinto rayado únicamente en horizontal). Por el teorema de la media:



$$\int_x^{x+dx} f(x) dx = (x+dx - x) \cdot f(\xi);$$

es decir

$$A(x+dx) - A(x) = f(\xi) dx$$

de donde

$$\frac{A(x+d) - A(x)}{dx} = f(\xi)$$

Haciendo tender $dx \rightarrow 0$, P' tiende a P , y por tanto, $f(\xi)$ tiende a $f(x)$. Como, por otra parte, se tiene

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A(x+d) - A(x)}{dx} = A'(x) \Rightarrow \boxed{A'(x) = f(x)}$$

que señala que la *función área es una primitiva de la función $f(x)$* .

La consecuencia anterior nos abre un importante camino para la determinación del área de figuras planas, apoyándonos en la obtención de funciones primitivas.

6.- REGLA DE BARROW.

De lo anteriormente expresado se puede deducir:

$$A(x) = \int_a^b f(x) dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene que:

$$A(x) - F(x) = K \text{ (constante)} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(x) + K$$

Para $x = a$ resulta

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) + K;$$

como

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \rightarrow 0 = F(a) + K$$

de donde

$$K = -F(a)$$

Fijando $x = b$, resulta la llamada ***fórmula de Barrow***

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.